Tarea n°1

P.1 a)Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[X^2] = 1$ y $\mathbb{E}[X^4] = 1$. Entonces $\mathbb{E}((X^2 - 1)^2) = \mathbb{E}(X^4) - 2\mathbb{E}(X^2) + 1 = 0$, lo que significa que $X^2 = 1$ c.s. Dado que $\mathbb{E}(X) = 0$, tenemos $\mathbb{P}(X = 1) = -\mathbb{P}(X = -1)$, y X es una variable de Rademacher.

b)Supongamos que $\mathbf{m}$ es tal que $m_2 < 0$. Para cualquier variable aleatoria X, tenemos $\mathbb{E}(X^2) \geq 0$, lo que implica $K(\mathbf{m}) = \emptyset$. Se puede probar que $K(\mathbf{m})$ no es vacío si y solo si la matriz $(m_{i+j})_{i,j\geq 0}$ es definida positiva (es decir, $\sum c_i \overline{c_j} m_{i+j} \geq 0$ para cualquier secuencia $(c_i)_{i\geq 0}$ con soporte finito).

P.2 Sea X una variable aleatoria con distribución $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ de soporte finito de cardinal $n > 0$, y sea Y una otra variable aleatoria con distribución ν tal que $\nu_i = \mu_i$ para $1 \leq i \leq 2n$. Sea $x_1, \ldots, x_n$ los átomos de μ, y pongamos $P(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$. Entonces, $P = 0$ μ-c.s, lo que implica

$$0 = \mathbb{E}(P(X)X^j)) = \sum_{i=0}^n a_i \mu_{i+j}$$

para cada $0 \leq j \leq n$.

Dado que $\nu_i = \mu_i$ para $0 \leq i \leq 2n$, la ultima igualdad implica

$$0 = \sum_{i=0}^n a_i \nu_{i+j} = \mathbb{E}(Y^j P(Y)).$$

Entonces, $\mathbb{E}(P(Y)^2) = 0$, y por lo tanto $P = 0$ ν-c.s, lo que significa que el soporte de Y esta incluido en el conjunto des las raíces de P. Para $1 \leq i_0 \leq n$ pongamos $P_{i_0} = \frac{1}{\prod_{i\neq i_0}(x_{i_0} - x_i)} \prod_{i\neq i_0}(t - x_i)$. Entonces, $P_{i_0}(x_i) = \delta_{i,i_0}$, lo que implica

$$\mathbb{E}(P_{i_0}(X)) = \sum_{i=1}^n \mu(x_i)\delta_{i,i_0} = \mu(x_{i_0}),$$

y el mismo para Y. Pero P_{i_0} es de grado $n-1$, entonces

$$\mu(x_{i_0}) = \mathbb{E}(P_{i_0}(X)) = \mathbb{E}(P_{i_0}(Y)) = \nu(x_{i_0}).$$

Por lo tanto, $\mu = \nu$.

P.3 Supongamos que μ es de soporte compacto incluido en $[-K, K]$, con $K > 0$, y sea ν una distribución con los mismos momentos. Dado que el soporte de μ esta incluido en $[-K, K]$, $\mu_{2p} \leq K^{2p}$ para cada $p > 0$, y tenemos también

$$\nu_{2p} \leq K^{2p} \text{ para cada } p > 1. \tag{1}$$

Para $\epsilon > 0$, pongamos $t_\epsilon = \nu(]K + \epsilon, +\infty[) + \nu(] - \infty, -K[$. Si $t_\epsilon > 0$, entonces

$$\nu^{2p} \geq t_\epsilon (K + \epsilon)^{2p} > K^{2p}$$

para $p > \frac{-\log t_\epsilon}{2(\log(K+\epsilon) - \log K)}$, lo que contradice (1). Por lo tanto, $t_\epsilon = 0$ para cada $\epsilon > 0$, y el soporte de ν esta en $[-K, K]$. Sea f una función continua y sea $\epsilon > 0$. Por el teorema de Weierstrass, existe un polinomio P tal que $\|P - f\|_{\infty,[-K,K]} \leq \epsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}|\mu(f) - \nu(f)| \leq& |\mu(f) - \mu(P)| + |\mu(P) - \nu(P)| + |\nu(P) - \nu(f)| \\ \leq& \epsilon + 0 + \epsilon \leq 2\epsilon.\end{aligned}$$

La ultima desigualdad vale para cada $\epsilon > 0$, entonces $|\mu(f) - \nu(f)| = 0$. Para cada función continua f, $\nu(f) = \mu(f)$, entonces $\nu = \mu$ por el teorema de Portmanteau.

P.4 Sea μ una variable beta (α,β). Entonces por la definición de μ y por integración por partes, para $i\geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\mu_i =&\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{[0,1]} x^{i+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\\ =&\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(-\left[\frac{1}{\beta}x^{i+\alpha-1}(1-x)^{\beta}\right]_0^1+\int_{[0,1]}\frac{i+\alpha-1}{\beta}x^{i+\alpha-1}(1-x)^{\beta}dx\right)\\ =&\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{[0,1]}\frac{i+\alpha-1}{\beta}x^{i+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(1-x)dx=\frac{i+\alpha-1}{\beta}(\mu_{i-1}-\mu_i).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mu_i=\frac{1}{1+\frac{i+\alpha-1}{\beta}}\frac{i+\alpha-1}{\beta}\mu_{i-1}=\frac{i+\alpha-1}{i+\alpha+\beta-1}\mu_{i-1}=\prod_{s=0}^{i-1}\frac{s+\alpha}{s+\alpha+\beta}.$$

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias tal que para cada $p>1$,

$$\mathbb{E}(X_n^p)\xrightarrow{n\to\infty}\prod_{s=0}^{p-1}\frac{i+\alpha}{i+\alpha+\beta}=\mu_p. \tag{2}$$

Entonces para $K>0$, $p\geq 1$,

$$\mathbb{E}(|X_n|^{2p},|X|\geq K)\leq\frac{1}{K^2}\mathbb{E}(X_n^{2p+2})\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{K^2}\mu_{2p+2},$$

y para cada $p\geq 1,\epsilon>0$, existe $K>0$ tal que

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}(|X_n|^{2p},|X|\geq K)\leq\epsilon.$$

Por lo tanto, la familia $(X_n)_{n\geq 1}$ es p-UI para cada $p\geq 1$. En particular, es tensa y cada subsecuencia $(X_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ que converge en distribución converge también en momentos. Por (2), el limite de una subsecuencia que converge tiene los mismos momentos que μ. Dado que μ tiene un soporte compacto, por P.3, tenemos que cada subsecuencia convergente converge a μ. Entonces, $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en distribución a μ.

P.5.a Pongamos

$$F_w(z)=\int_0^{+\infty}t^{w-1}e^{-zt}dt,\ G_w(z)=\frac{1}{z^w}\Gamma(w),$$

para z tal que $\Re(z)>0$. Sea z_0 tal que $\Re(z_0)>0$, y $0<r<\Re(z_0)$. Entonces, dado que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\left|t^{w-1}e^{-(z_0+re^{i\theta})t}ire^{i\theta}\right|dtd\theta\leq\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}t^{w-1}re^{-(\Re(z_0)-r)t}dtd\theta<\infty,$$

el teorema de Fubini implica

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}t^{w-1}e^{-(z_0+re^{i\theta})t}ire^{i\theta}dtd\theta=\int_0^{+\infty}t^{w-1}\left(\int_0^{2\pi}re^{-(z_0+re^{i\theta})t}ire^{i\theta}d\theta\right)dt=0,$$

donde usamos también que $z\mapsto e^{-zt}$ es analítica y el teorema integral de Cauchy. Entonces, la function F_w es analítica por el teorema integral de Cauchy. La función G_w es claramente analítica.

Para $z\in\mathbb{R}_{>0}$, tenemos por el cambio de variables $u=tz$

$$\int_0^{+\infty}t^{w-1}e^{-zt}dt=\frac{1}{z}\int_0^{+\infty}(u/z)^{w-1}e^{-u}du=\frac{1}{z^w}\Gamma(w),$$

y entonces G_w coincide con F_w sobre $\mathbb{R}_{>0}$. Las funciones G_w y F_w son analíticas sobre $U:=\{z\in\mathbb{C},\Re(z)>0\}$ y coinciden sobre un conjunto que tiene un punto de acumulación en U, entonces son iguales sobre U por el teorema dado en la tarea.

P.5.b Sea $p \in \mathbb{N}$. Dado que g es par,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p g(x)dx = 0$$

para p impar. Para p par, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^p g(x)dx =& \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^{p-2/3} \exp(-|x|^{-2/3}) \left(\exp(i\frac{\pi}{3} + i\sqrt{3}|x|^{2/3}) + \exp(-i\frac{\pi}{3} - i\sqrt{3}|x|^{2/3})\right) dx \\ =& \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^{p-2/3} \left(\exp(i\frac{\pi}{3} - (1-i\sqrt{3})|x|^{2/3}) + \exp(-i\frac{\pi}{3} - (1+i\sqrt{3})|x|^{2/3})\right) dx\end{aligned}$$

Por el cambio de variables $t = x^{2/3}$, obtenemos usando P.5.a

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} x^p g(x)dx \\ =& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{(3/2p+1/2)-1} \left(\exp(i\frac{\pi}{3} - (1-i\sqrt{3})t) + \exp(-i\frac{\pi}{3} - (1+i\sqrt{3})t)\right) dt \\ =& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\exp(i\frac{\pi}{3}) \frac{\Gamma(3/2p+1/2)}{2^{(3/2p+1/2)} \exp((-i\pi/3)(3/2p+1/2)i)} + \exp(-i\frac{\pi}{3}) \frac{\Gamma(3/2p+1/2)}{2^{(3/2p+1/2)} \exp(\pi/3(3/2p+1/2)i}\right) \\ =& \frac{\Gamma(3/2p+1/2)}{2^{3/2p+3/2}\sqrt{\pi}} \left(\exp(i\pi/3(1+(3p/2+1/2))) + \exp(-i\pi/3(1+(3p/2+1/2))\right) \\ =& \frac{\Gamma(3/2p11/2)}{2^{3/2p+1/2}\sqrt{\pi}} \cos((1+(3p/2+1/2))\pi/3).\end{aligned}$$

Dado que $p = 2k$ es par, tenemos que

$$(1+(3p/2+1/2))\pi/3 = \pi/3 + \pi/6 + k\pi = \pi/2 + k\pi,$$

lo que implica

$$\int_0^{+\infty} x^p g(x)dx = 0.$$

Entonces por paridad de g,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p g(x)dx = 0.$$

P.5.c Para $\rho \in [0, 1/2]$, $f + \rho g \geq 0$ sobre $\mathbb{R}$. Además, por P.5.b para $p = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} f + \rho g = \int_{\mathbb{R}} f + \rho \int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f = 1,$$

lo que muestra que $f + \rho g$ es una función de densidad.

Por P.5.b para $p \geq 1$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x) + \rho g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)dx + \rho \int_{-\infty}^{+\infty} x^p g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)dx.$$

Entonces X con densidad f no es UDM.

P.5.d Calculamos el momento de orden $p, p \geq 1$ de la densidad f. La densidad f es par, entonces para p impar el momento de orden p es igual a zero. Sea $p = 2k$ con $k \geq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)dx = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} |x|^{2k-2/3} \exp(-|x|^{2/3})dx =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} |t|^{3k-1/2} \exp(-t)dt \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3k+1/2),\end{aligned}$$

donde usamos el cambio de variables $t = x^{2/3}$ en la secunda igualdad. Por propiedades de la función Γ, tenemos

$$\Gamma(3k+1/2) = (3k-1/2)\Gamma(3k-1/2) = \prod_{i=1}^{3k}(3k+1/2-i)\Gamma(1/2) = 2^{3p/2}\prod_{i=1}^{3k}(3p+1-2i)\sqrt{\pi}.$$

Sea X una variable aleatoria con densidad f, y X_ρ una variable aleatoria con densidad $f+\rho g$, $\rho \in [0,1/2]$. Por lo que hicimos antes, si $\mathbf{m}$ es tal que si p es impar $m_p = 0$ y si p es par $m_p = (3p-1)(3p-3)\dots 1$, entonces $\mathbf{m}$ es la secuencia de los momentos de la variable $2^{3/2}X$. Por P.5.c, entonces $K(\mathbf{m})$ contiene toda la familia $2^{3/2}X_\rho, \rho \in [0,1/2]$.

P.6.a Sea μ, ν dos distribuciones y $p \geq 1$ tal que μ, ν tienen momentos de orden p y

$$\int_{\mathbb{R}} t^p d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} t^p d\nu(t).$$

Entonces, para $u \in [0,1]$,

$$\int_{\mathbb{R}} t^p d\left(u\mu + (1-u)\nu\right)(t) = u\int_{\mathbb{R}} t^p d\mu(t) + (1-u)\int_{\mathbb{R}} t^p d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} t^p d\mu(t).$$

Por lo tanto, si μ, ν están en $K(\mathbf{m})$, entonces $u\mu + (1-u)\nu$ esta también en $K(\mathbf{m})$, y $K(\mathbf{m})$ es un conjunto convexo.

P.6.b Sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una secuencia en $K(\mathbf{m})$. Sea $\epsilon > 0$ y $K > 0$ tal que $\frac{m_2}{K} \leq \epsilon$. Dado que $\mu_n \in K(\mathbf{m})$, por la desigualdad de Chebyshev,

$$\mu_n([-K,K]^c) \leq \frac{m_2}{K} \leq \epsilon.$$

Entonces la secuencia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ es tensa, y existe una subsecuencia $(\mu_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ que converge en distribución a una distribución μ. Por la misma deducción que en P.4, $\mu \in K(\mathbf{m})$, y $K(\mathbf{m})$ es compacto.

P.7 Sea Φ_X la transformada de Fourier de X, y sea $r > 0$ tal que $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu_n}{n!} r^n < \infty$. Entonces para $0 < t < r$, la esperanza $\mathbb{E}(\exp(t|X|))$ es finita. Por lo tanto, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $-r < \Im(z) < r$, la función $\widetilde{\Phi}_X(z) = \mathbb{E}(\exp(izX))$ es bien definida, holomorfa, y coincide con $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!}(iz)^n$ sobre $B(0,r)$. Además, $\widetilde{\Phi}_X = \Phi_X$ sobre $\mathbb{R}$.

Sea X' una otra variable aleatoria con los mismos momentos. De igual manera, podemos definir una function $\widetilde{\Phi}_{X'}$ holomorfa sobre $H_r := \{z \in \mathbb{C}, -r < \Im(z) < r\}$ tal que $\widetilde{\Phi}_{X'} = \Phi_{X'}$ sobre $\mathbb{R}$ y $\widetilde{\Phi}_{X'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!}(iz)^n$ sobre $B(0,r)$. Las funciones holomorfas $\widetilde{\Phi}_X$ y $\widetilde{\Phi}_{X'}$ coinciden sobre $B(0,r)$, entonces $\widetilde{\Phi}_X$ y $\widetilde{\Phi}_{X'}$ coinciden sobre H_r por el teorema dado en P.5.a. En particular, coinciden sobre $\mathbb{R}$ lo que implica $\Phi_X = \Phi_{X'}$. Las dos variables aleatorias tienen la misma transformada de Fourier, entonces por el teorema de Levy tienen la misma distribución y X es UDM.

P.8.a Los momentos de una variable gaussiana $\mathcal{N}(0,1)$ son dados por $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ y $m_{2k+1} = 0$, $k \geq 1$. Por lo tanto, para cada $r > 0$,

$$\frac{m_{2k}}{(2k)!} r^{2k} = \frac{r^{2k}}{2^k k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

y el radio de convergencia de la serie de Laplace de $N(0,1)$ es infinito. Por P.7, $N(0,1)$ es UDM.

P.8.b Sea $p \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^p) = \mathbb{E}(\exp(pN)) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(pt)\exp(-|t|^2/2)dt \\ =& \frac{\exp(p^2/2)}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t-p|^2/2)dt = \exp(p^2/2).\end{aligned}$$

Para cada $r > 0$,

$$\frac{r^p \frac{\exp(p^2/2)}{p!}}{r^{p-1}\frac{\exp((p-1)^2/2)}{(p-1)!}} = r\exp((2p-1)/2)/p \xrightarrow[p\to\infty]{} \infty,$$

entonces la serie de Laplace de Y tiene un radio de convergencia nulo.

Admitimos el teorema siguiente :

Teorema Sea X una variable de densidad f positiva sobre $\mathbb{R}_+$. Si

$$\int_0^{+\infty} \frac{-\log f(t)}{1+t^2} dt < +\infty,$$

entonces X no es UDM.

P.9.a Mostramos primero que Y tiene una densidad. Sea g una función acotada y medible sobre $\mathbb{R}$. Con el cambio de variable $u = \exp(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(Y)) = \mathbb{E}(g(\exp(N))) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\exp(t)) \exp(-\frac{t^2}{2}) dt \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_{>0}} g(u) \exp(-\frac{\log(u)^2}{2}) \frac{du}{u}.\end{aligned}$$

Entonces, Y tiene la densidad $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\frac{\log(t)^2}{2})}{t}$, y

$$-\log f(t) = \frac{\log(t)^2}{2} + \log(t) + \frac{1}{2}\log(\pi).$$

Por lo tanto, $-\log f(t) \leq C(1+\sqrt{t})$ sobre $\mathbb{R}_{>0}$ para C suficientemente grande. Eso implica que $\int_0^{+\infty} \frac{-\log(t)}{1+t^2} dt < +\infty$, y Y no es UDM.

P.9.b De igual manera, calculamos primero la densidad de Z. Para g medible y acotada sobre $\mathbb{R}$, tenemos con el cambio de variable $u = t^3$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(Z)) = \mathbb{E}(g(W^3)) =& \int_{\mathbb{R}^+} g(t^3) \exp(-t) dt \\ =& \int_{\mathbb{R}^+} g(u) \exp(-u^{1/3}) \frac{du}{3u^{2/3}}.\end{aligned}$$

Entonces, Z tiene la densidad $f(t) = \frac{\exp(-t^{1/3})}{3t^{2/3}}$. Dado que

$$-\log f(t) = t^{1/3} - \log 3 - \frac{2}{3}\log(t),$$

tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}} \frac{\log f(t)}{1+t^2} < +\infty,$$

y Z no es UDM.